Bab 3
Analisis Ralat

3.1. Menaksir Ralat

Misalnya suatu besaran y dihitung dari besaran terukur x_1, x_2, ..., x_n. Jika dalam pengukuran x_1, x_2, ..., x_n menghasilan ralat sebesar Δx_1, Δx_2, ..., Δx_3, maka nilai y yang diperoleh akan membawa ketidakpastian/ralat sebesar Δy. Bagaimana menaksir nilai Δy tersebut? Menaksir ralat biasanya dilakukan pada hasil perhitungan eksperimen pendahuluan, guna memperkirakan ralat dari masing-masing variabel atau besaram fisis yang terlibat dalam eksperimen. Hal ini diperlukan dalam upaya menyusun strategi eksperimen, seperti dalam memilih besaran mana yang perlu mendapat perhatian lebih serius atau perlu diukur lebih teliti. Berikut itu akan diberikan contoh perumusan taksiran ralat untuk hubungan penjumlahan, perkalian, dan pembagian.

Hubungan penjumlahan. Misalkan besaran x_1, x_2,dan y terhubung oleh persamaan:

$$y=x_1 + x_2 \tag{3.1}$$

kemudian dari hasil pengukuran diperoleh:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta x_1 \tag{3.2}$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta x_2 \tag{3.3}$$

Nilai terbaik dari besaran y diambil dari nilai rata-rata x_1, x_2 dengan persamaan:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \tag{3.4}$$

Untuk menaksir ralat besaran y, kita perlu menaksir nilai maksimum y_{mak} dan nilai minimum $y_{\min}$ yang mungkin, yaitu:

$$y_{\min} = (\bar{x}_1 - \Delta x_1) + (\bar{x}_2 - \Delta x_2) = \bar{y} - (\Delta x_1 + \Delta x_2) \tag{3.5}$$

$$y_{mak} = (\bar{x}_1 + \Delta x_1) + (\bar{x}_2 + \Delta x_2) = \bar{y} + (\Delta x_1 + \Delta x_2) \tag{3.6}$$

Ralat pada besaran y yaitu Δy yang diperoleh sebagai akibat dari perambatan ralat besaran x_1, x_2 melalui hubungan penjumlahan adalah:

$$\Delta y = \frac{y_{mak} - y_{\min}}{2} = \frac{[\bar{y} + (\Delta x_1 + \Delta x_2)] - [\bar{y} - (\Delta x_1 + \Delta x_2)]}{2} \tag{3.7}$$

Dengan melakukan penyederhanaan terhadap persamaan (3.7), maka diperoleh perumusan untuk nilai taksiran ralat Δy sebagai berikut:

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 \tag{3.8}$$

Hubungan Perkalian. Untuk besaran x_1, x_2,dan y terhubung oleh operator perkalian, yaitu:

$$y = x_1 \times x_2 \tag{3.9}$$

dengan hasil pengukuran besaran *x* seperti persamaan (3.2) dan (3.3), maka nilai ukur terbaik untuk besaran *y* adalah:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \tag{3.10}$$

Nilai taksiran minimum dan maksimum untuk besaran *y* adalah:

$$\begin{aligned} y_{\min} &= (\bar{x}_1 - \Delta x_1)(\bar{x}_2 - \Delta x_2) \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_1\Delta x_2 - \Delta x_1\bar{x}_2 + \Delta x_1\Delta x_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} y_{mak} &= (\bar{x}_1 + \Delta x_1)(\bar{x}_2 + \Delta x_2) \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\Delta x_2 + \Delta x_1\bar{x}_2 + \Delta x_1\Delta x_2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ralat pada besaran *y* yaitu Δy, untuk hubungan perkalian adalah sebagai berikut:

$$\Delta y = \frac{y_{mak} - y_{\min}}{2} = \frac{2\bar{x}_1\Delta x_2 + 2\Delta x_1\bar{x}_2}{2} \tag{3.13}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \tag{3.14}$$

Hubungan Pembagian. Untuk besaran terukur yang terhubung secara pembagian, yaitu :

$$y = \frac{x_1}{x_2} \tag{3.15}$$

dengan taksiran nilai ukur terbaiknya:

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \tag{3.16}$$

maka nilai taksiran maksimum y_{mak} dan minimum $y_{\min}$ yang mungkin, untuk besaran *y* adalah:

$$y_{\min} = \frac{\bar{x}_1 - \Delta x_1}{\bar{x}_2 + \Delta x_2} = \frac{\bar{x}_1\left(1 - \dfrac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)}{\bar{x}_2\left(1 + \dfrac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right)}$$

$$= \bar{y}\left(1 - \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)\left(1 - \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right) \tag{3.17}$$

$$y_{\min} = \bar{y}\left[1 - \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} - \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + \left(\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right)_{diabaikan}\right]$$

$$= \bar{y}\left[1 - \left(\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)\right] \tag{3.18}$$

$$y_{\min} = \bar{y} - \bar{y}\left(\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right) \tag{3.19}$$

$$y_{mak} = \frac{\bar{x}_1 + \Delta x_1}{\bar{x}_2 - \Delta x_2} = \frac{\bar{x}_1\left(1 + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)}{\bar{x}_2\left(1 - \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right)}$$

$$= \bar{y}\left(1 + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)\left(1 + \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right) \tag{3.20}$$

$$y_{mak} = \bar{y}\left[1 + \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + \left(\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right)_{diabaikan}\right]$$

$$= \bar{y}\left[1 + \left(\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right)\right] \tag{3.21}$$

$$y_{mak} = \bar{y} + \bar{y}\left(\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}\right) \tag{3.22}$$

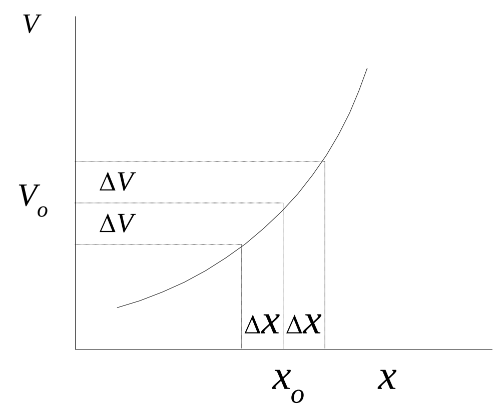
$$\Delta y = \frac{y_{mak} - y_{\min}}{2} = \bar{y}\left(\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}\right) \tag{3.23}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \tag{3.24}$$

3.2. Analisis Perambatan Ralat

Misalkan suatu rumus teoritik besaran *V* dihitung dari dua besaran terukur *x* dan *y*, $V=f(x,y)$. Sebagai akibat ketidakpastian pengukuran *x* dan *y* sebesar Δx dan Δy, maka *V* mempunyai ketidakpastian sebesar ΔV. Jika ketidakpastian Δx tidak mempunyai hubungan dengan ketidakpastian Δy, maka kedua ketidakpastian itu dikatakan independen. Sebaliknya, jika kedua ketidakpastian itu berhubungan dikatakan non-independen. Bagaimana hubungan antara ΔV, Δx, dan Δy ditentukan berdasarkan kedua keadaan hubungan antar ketidakpastian tersebut merupakan bagian dari analisis ketidakpastian.

Perambatan Ralat Aktual Diketahui. Misalkan *V* hanya tergantung pada satu variabel, yaitu $V=V(x)$, dan diketahui nilai kesalahan aktual dari Δx. Dengan bantuan gambar 1, ralat ΔV ditentukan sebagai berikut



Berdasarkan gambar di atas dapat ditunjukkan bahwa:

$$V_{\max} = V(x_0) + \Delta V = V(x_0 + \Delta x) \tag{3.25}$$

atau,

$$\Delta V = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \tag{3.26}$$

Untuk $\Delta x << x_o$ maka dapat diperoleh persamaan perambatan ralat untuk satu variabel sebagai berikut ini (yang merupakan suku pertama dalam deret Taylor):

$$\Delta V = \Delta x \frac{\partial V}{dx} \tag{3.27}$$

Sedangkan persamaan perambatan ralat untuk dua variabel adalah:

$$\Delta V = \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial V}{\partial y} \tag{3.28}$$

Persamaan (3.27) dapat diturunkan dari deret Taylor untuk satu variabel, sedangkan persamaan (3.28) diturunkan dari deret Taylor untuk dua variabel. Deret Taylor dua variabel ditunjukkan pada persamaan (3.29) di bawah ini.

$$f(x_i+\Delta x, y_i+\Delta y) = f(x_i, y_i) + \left(\Delta x \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y}\right)$$
$$+......+\frac{1}{n!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_i, y_i)+...... \tag{3.29}$$

Perambatan Ralat Aktual Tak Diketahui. Untuk suatu fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$x = f(u, v, \ldots) \tag{3.30}$$

maka nilai *x* dengan kebolehjadian terbesar dinyatakan dengan persamaan:

$$\bar{x} = f(\bar{u}, \bar{v}, \ldots) \tag{3.40}$$

Nilai *x* dari pengukuran individual dinyatakan dengan persamaan:

$$x_i = f(u_i, v_i, \ldots) \tag{3.41}$$

dan nilai simpangan hasil ukur besaran *x* dinyatakan oleh persamaan:

$$x_i - \bar{x} \approx (u_i - \bar{u})\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + (v_i - \bar{v})\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \ldots \tag{3.42}$$

Variansi nilai ukur besaran *x* dihitung dengan menggunakan persmaan (3.43), yaitu:

$$\sigma_x{}^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 \tag{3.43}$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan persamaan (3.42) ke persamaan (3.43), maka nilai variansi nilai ukur besaran *x* adalah sebagai berikut:

$$\sigma_x{}^2 \approx \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum \left[(u_i - \bar{u})\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + (v_i - \bar{v})\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \ldots\right]^2 \tag{3.44}$$

$$\sigma_x{}^2 \approx \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Sigma \left[(u_i - \bar{u})^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + (v_i - \bar{v})^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right.$$
$$\left. + 2(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \ldots\right] \tag{3.45}$$

Persamaan (3.45) dapat disederhanakan dengan menggunakan definisi nilai variasi dari besaran *u* (persamaan 3.46) dan *v* (persamaan 3.47), serta nilai kovariansi antara *u* dengan *v* (persamaan 3.48) berikut ini:

$$\sigma_u{}^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum (u_i - \bar{u})^2 \tag{3.46}$$

$$\sigma_v{}^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum (v_i - \bar{v})^2 \tag{3.47}$$

$$\sigma_{uv}{}^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum [(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})] \tag{3.48}$$

Akhirnya didapatkan persamaan perambatan ralat yang ditunjukkan pada persamaan (3.49):

$$\sigma_x{}^2 \approx \sigma_u{}^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v{}^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\sigma_{uv}{}^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \ldots \tag{3.49}$$

Persamaan (3.49) berlaku apabila ralat antara besaran terukur *u* dan *v* saling tergantung (berhubungan). Apabila antara besaran terukur saling tidak tergantung (tidak berhubungan) maka tidak ada sumbungnn dari nilai kovariansi, sehingga persamaan ramabatan ralatnya sebagaimana dirunjukkan pada persamaan (3.50) di bawah ini:

$$\sigma_x{}^2 \approx \sigma_u{}^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v{}^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \ldots \tag{3.50}$$

3.3. Nilai Rata-rata dan Ralat Berbobot

Misalkan kita mempunyai n buah nilai ukur (x_i; i=1,2, ...n) yang berasal dari distribusi-distribusi induk Gaussian dengan rata-rata μ sama dan simpanga baku σ_i, maka kebolehjadian mendapatkan nilia ukur x_i adalah:

$$P(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_i}\right)^2} \tag{3.51}$$

Oleh karena nilai μ tidak diketahui, maka nilai rata-rata populasi induk didekati oleh nilai rata-rata eksperimental μ'. Kebolehjadian medapatkan nilai x_i adalah:

$$P(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i}\right)^2} \tag{3.52}$$

Kebolehjadian untuk mendapatkan semua *n* buah pengukuran adalah

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i) \tag{3.53}$$

$$P(x) = \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2} \tag{3.54}$$

Nilai rata-rata dari suatu pengukuran adalah nilai yang mempunyai kebolehjadian terbesar. Pada fungsi distribusi Gaussian, kebolehjadi terbesar terjadi jika faktor dalam eksponensial minimum, yang secara matematis dipenuhi apabilai:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(-\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 \right) = 0 \tag{3.55}$$

$$\sum_i \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right) = 0 \tag{3.56}$$

$$\sum_i \left(\frac{x_i}{\sigma_i} \right) - \sum_i \left(\frac{\mu'}{\sigma_i} \right) = 0 \tag{3.57}$$

Akhirnya diperoleh persamaan untuk nilai rata-rata berbobot sebagai berikut:

$$\mu' = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{3.58}$$

Ketidakpastiannya dihitung melalui persamaan perambatan ralat, yaitu:

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \sum \left[\sigma_i^2 \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} \right)^2 \right] \tag{3.59}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.60) di bawah ini:

$$\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{3.60}$$

ke persmaan (3.59) maka diperoleh perumusan untuk nilai ralat sebagai berikut (yang hasil akhirnya ditunjukkan pada persamaan (3.63):

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \sum \sigma_i^2 \frac{\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2} = \sum \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2} \tag{3.61}$$

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \frac{1}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{3.62}$$

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{3.63}$$

Soal:

1. Tentukan hubungan antara ralat σ_x dengan ralat σ_u dan atau σ_v dari masing-masing persamaan di bawah ini:
   a. $x = au \pm bv$
   b. $x = \pm auv$
   c. $x = \pm \dfrac{au}{v}$
   d. $x = au^{\pm b}$
   e. $x = ae^{\pm bu}$
   f. $x = a \ln(\pm bu)$

2. Dengan menggunakan rumus taksiran perambatan ralat, tentukan hubungan antara ralat Δx dengan ketidakpastian Δu dan Δv dari masing-masing persamaan di bawah ini:
   a. $x = \dfrac{1}{2}(u + v)$
   b. $x = \dfrac{1}{2}(u - v)$
   c. $x = \dfrac{1}{u^2}$
   d. $x = uv^2$
   e. $x = u^2 + v^2$