1. Pencocokan Data ke Garis Lurus

Misalkan kita mempunyai n titik data eksperimental (x_i, $y_i \pm \sigma_i$) dan diketahui bahwa hubungan teoritis antara x dan y adalah hubungan linear (persamaan garis lurus) dengan persamaan:

$$y = a + bx \tag{1}$$

Masalah yang akan dipecahkan melalui regresi adalah menemukan nilai a dan b beserta ketidakpastian masing-masing σ_a dan σ_b. Bila titik data diasumsikan sebagai sebuah sampel dari suatu distribusi normal maka kebolehjadian dari nilai ukur y_i adalah:

$$P(y,\sigma) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \hat{y}}{\sigma_i}\right)^2} \tag{2}$$

apabila $\hat{y}_i = a + bx_i$ adalah nilai terbaik y pada x_i. Kebolehjadian total n set nilai adalah:

$$P(y,\sigma) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{y_i - \hat{y}}{\sigma_i}\right)^2} \tag{3}$$

Nilai pencocokan terbaik $\hat{y}$ terhadap y dicapai jika faktor eksponensial minimum:

$$\chi^2 = -\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{y_i - \hat{y}}{\sigma_i}\right)^2 \quad \text{minimum} \tag{4}$$

meninimumkan nilai χ^2 terhadap a dan b berarti mencari nilai a dan b, yang mana turunan parsialnya sama dengan nol, yaitu:

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a} = -\frac{1}{2}\sum\frac{2}{\sigma_i^2}\left(y_i - a - bx_i\right) = 0 \qquad (5)$$

$$\sum\frac{1}{\sigma_i}y_i - a\sum\frac{1}{\sigma_i} - b\sum\frac{1}{\sigma_i}x_i = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial b} = -\frac{1}{2}\sum\frac{2}{\sigma_i^2}\left(y_i - a - bx_i\right)x_i = 0 \qquad (7)$$

$$\sum\frac{1}{\sigma_i}x_i y_i - a\sum\frac{1}{\sigma_i}x_i - b\sum\frac{1}{\sigma_i}x_i^{\,2} = 0 \qquad (8)$$

Penentuan nilai *a* dan *b* dengan jalan meminimumkan nilai χ^2 dekenal dengan nama metode kuadrat terkecil (*least squares*).

Pencocokan untuk Data dengan Ralat/ketidakpastian Sama.

Untuk kasus data dengan nilai ralat sama ($\sigma_i = \sigma$) maka dari persamaan (6) dan (8) dapatkan persamaan:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (9)$$

$$b = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (10)$$

$$\Delta = N\sum x_i^{\,2} - \left(\sum x_i\right)^2 \qquad (11)$$

$$\sigma_a^{\,2} = \frac{\sigma^2}{\Delta}\sum x_i^2 \qquad (12)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{N\sigma^2}{\Delta} \qquad (13)$$

Data Dengan Ralat Tidak Sama.

Untuk data dengan Ketidak-pastian Tidak Sama ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq ... \neq \sigma_n$) kita peroleh persamaan:

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i x_i}{\sigma_i^2}\right) \qquad (14)$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) \qquad (15)$$

$$\Delta = \sum\frac{1}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2 \qquad (16)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{\Delta}\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{\Delta}\sum\frac{1}{\sigma_i^2}$$

2. Pencocokan Data ke Polinomial

Di dalam pengukuran gejala fisika, fungsi taksiran berupa polinomial pangkat dan polinomial Legendre merupakan fungsi yang sering dipakai untuk pencocokan data. Kemudian, metode penco-cokan ke fungsi-fungsi tersebut menggunakan metode kuadrat terkecil (*least square*). Metode ini akan menghasilkan garis/kurva pencocokan yang unik untuk himpunan data yang diberikan. Secara umum, fungsi polinomial pangkat dan polinomial legendre dapat dinyatakan melalui persamaan berikut:

$$y(x) = \sum_{l=0}^{m} a_l f_l(x) \qquad (4.60)$$

Untuk polinomial pangkat, fungsi $f_l(x)$ adalah:

$$f_l(x) = x^l \qquad (4.61)$$

sedangkan untuk polinomial Legendre, fungsi $f_l(x)$ adalah:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 \qquad (4.62)$$

yang dalam hal ini $x=cos\ \theta$. Suku lebih tinggi dari polinomial Legendre dapat dihitung dari hubungan rekursif sebagai berikut:

$$P_l(x) = \frac{1}{l}[(2l-1)xP_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x)] \qquad (4.63)$$

Melalui metode kuadrat terkecil, koefisien polinomial ditentukan dengan meminimalkan kuantitas:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_i}\left(y_i - \sum_{l=0}^{m} a_l f_l(x_i)\right)\right]^2 \qquad (4.64)$$

Minimalisasi χ^2 dilakukan dengan mengambil turunan persialnya terhadap koefirian a_l dan menyamakannya dengan nol, sehinggan diperoleh persamaan:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum_{l=1}^{m}\left[a_l \sum_{i=i}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} f_k(x_i) f_l(x_i)\right)\right]$$

(4.65)

Kemudian, dari persamaan (4.65) dapat disusun dalam bentuk matriks sebagai berikut:

β=aα

(4.66)

dalam hal ini:

$$\beta_l = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i \frac{f_l(x_i)}{\sigma_i^2}\right] \qquad (4.67)$$

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=i}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_i^2} f_k(x_i) f_l(x_i)\right] \tag{4.68}$$

Sehingga, nilai parameter **a** dapat dihitung melalui persamaan:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{-1} \tag{4.69}$$

atau,

$$a_k = \sum_{l=1}^{m}\left[\varepsilon_{lk}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} y_i f_l(x_i)\right)\right] \tag{4.70}$$

dalam hal ini, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$.

Estimasi ralat untuk koefisien **a** ditentukan melalui persamaan berikut ini:

$$\sigma_{a_k}^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\sigma_i^2\left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i}\right)^2\right] \tag{4.71}$$

$$\sigma_{a_k}^2 = \varepsilon_{kk} \tag{4.72}$$

Jika ralat dari masing-masing titik data tidak diketahui, maka nilai ralat ini dapat didekati oleh persamaan:

$$\sigma_i^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-m-1}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \sum_{l=1}^{m}\left(a_l f_l(x_i)\right)\right]^2 \tag{4.73}$$

Dengan demikian, estimasi ralat untuk **a** adalah:

$$\sigma_{a_k}^2 \approx s^2 \varepsilon_{kk}(\sigma_i = 1) \tag{4.74}$$

Contoh 4.1. Pencocokan ke Polinomial Pangkat

Misalkan diperoleh data hubungan antara tegangan keluaran dari sambungan termokopel *V* sebagai fungsi suhu *T* seperti padaTabel 1:

Tebel 1

Data Tegangan Termokopel Sebagai Fungsi Suhu

T (K)	V (volt)	T(K)	V(volt)
0	-0.738 0.5	55	1.305 0.3
5	-0.537 0.5	60	1.541 0.5
10	-0.849 0.4	65	1.768 0.2
15	-0.354 0.3	70	1.935 0.2
20	-0.196 0.2	75	2.147 0.2
25	-0.019 0.2	80	2.456 0.3
30	0.262 0.5	85	2.676 0.3
35	0.413 0.3	90	2.994 0.3
40	0.734 0.4	95	3.200 0.4

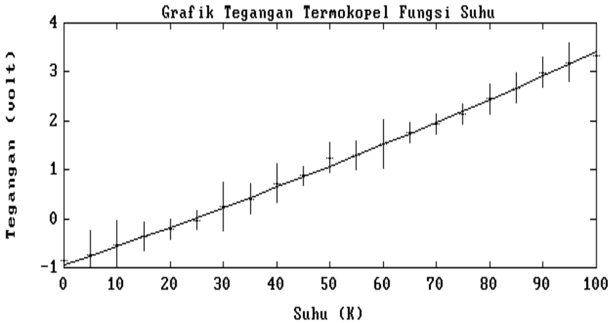
45 50	0.882 0.2 1.258 0.3	100	3.318 0.5

Hasil pencocokan ke polinomial pangkat orde 2 mendapatkan nilai koefisien polinomial ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2

Nilai Koefisien Polinomial Pangkat Orde 2

Koefisien	Nilai
a_0	- 0,937 ± 0,220
a_1	0,037 ± 0,010
a_2	0,0001 ± 0,0001



Gambar 1. Grafik Pencocokan ke Polinomial Pangkat Orde 2

Contoh 4.2. Pencocokan ke Polinomial Legendre

Misalkan diperoleh data data hubungan distribusi sudut pancaran sinar gamma pada tabel 3.

Tabel 3

Data Distribusi Sudut dari Cacah Emisi Gamma

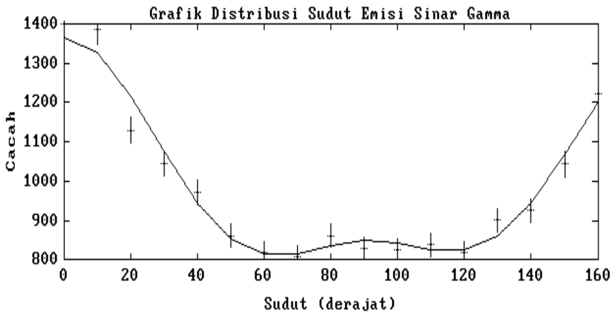
Sudut (^{0})	Cacah	Sudut (^{0})	Cacah
0	1400	90	829
10	1386	100	824
20	1130	110	839
30	1045	120	819
40	971	130	901
50	862	140	925
60	819	150	1044

70 80	808 862	160	1224

Pencocokan data ke polinomial Legendre orde 4 memperoleh hasil koefisien polinomial sebagaimana Tabel 4, dan hasil grafik pencocokan pada Gambar 2.

Tabel 4
Nilai Koefisien Polinomial Legendre Orde 4

Koefisien	Nilai
a_0	906,78 ± 7,77
a_1	-1,02 ± 12,43
a_2	258,53 ± 16,32
a_3	12,00 ± 19,47
a_4	189,52 ± 21,66



Gambar 2. Grafik Pencocokan Data Polinomial Legendre Orde 4

Soal:

1. Apabila fungsi *y=f(x)* di bawah ini ditransformasi ke persamaan garis lurus *Y=A+BX*, tuliskanlah bentuk eksplisit dari *Y=f(y), X=f(x), A=f(a),* dan *B=f(b).*

a. $y = a + \frac{b}{x}$ b. $y = \frac{1}{a+bx}$ c. $y = \frac{x}{a+bx}$

d. $y = ab^x$ e. $y = ax^b$ f. $y = ae^{bx}$

2. Telah diketahui bahwa cahaya yang menembus bahan penyerap akan mengalami penurunan intensitas secara

eksponensial terhadap ketebalan bahan penyerap tersebut. Jika diperoleh data eksperimen sebagai berikut:

I (intenstas cahaya)	6,2	5,2	4,3	2,9	2,4	1,7	1,4	1,1	0.9	0,8
x (ketebalanbahan)	10	16	18	26	31	44	51	66	74	89

Dengan menggunakan analisis regresi, tentukanlah nilai koefisien serap bahan tersebut dan intensitas cahaya awal beserta nilai ralatnya.