DISTRIBUSI HASIL PENGUKURAN
DAN NILAI RATA-RATA

Distribusi Binomial

Misalkan dalam melakukan percobaan Bernoulli (*Bernoulli trials*) berulang-ulang sebanyak n kali, dengan kebolehjadian sukses *p* pada tiap percobaan, diperoleh *x* sukses dalam n percobaan itu. Maka distribusi kebolehjadian *x* dinamakan distribusi binomial dengan n percobaan dan kebolehjadian sukses *p*. Istilah distribusi binomial diturunkan dari satu sifat penting dalam aljabar, yang dinamakan teorema ekspansi binomial. Rumus distribusi binomial dengan n percobaan ditunjukkan pada persamaan (1).

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (1)$$

dalam hal ini: *n* = jumlah percobaan, *x* = jumlah kejadian sukses, *p* = kebolehjadian sukses. dan (1-*p*) = kebolehjadian gagal. Nilai rata-rata dari distribusi binomial ditunjukkan pada persamaan (2), sedangkan variansinya ditunjukkan pada persamaan (3) di bawah ini.

$$\mu = np \qquad (2)$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = npq \qquad (3)$$

Contoh soal 2.1.

Sebuah kotak berisi 10.000 bola kecil dari logam. Sebanyak 2000 buah dicat putih sedang sisanya dicat hitam. Seseorang mengambil 100 bola dari kotak dengan satu bola untuk setiap kali pengambilan secara acak. Berapakah kebolehjadian bahwa 10 bola dari yang terambil tersebut berwarna putih?

Jawaban:

$$p = P(\text{putih}) = \frac{2000}{10000} = 0{,}2$$

Kebolehjadian bahwa 10 bola berwarna putih dari 100 bola yang terambil secara acak adalah (berdasarkan persamaan 2.3):

$$P_{10} = \frac{100!}{(100-10)!10!}(0{,}2)^{10}(0{,}8)^{90} = 0{,}0034$$

Distribusi Normal

Distribusi normal atau distribusi Gauss pertama kali dipelajari pada abad ke delapan belas, ketika orang mengamati ralat pengukuran berditribusi simetrik dan berbentuk bel. De Moivre mengembangkan bentuk matematik distribusi ini dalam tahun 1733, sebagai bentuk limit dari distribusi binomial. Laplace telah mengenal juga distribusi ini sebelum tahun 1775. Gauss menurunkan persamaan distribusi ini dari suatu studi tentang ralat dalam pengukuran yang berulang-ulang dari kuantitas yang sama, dan kemudian mepublikasikannya pada tahun 1809. Untuk menghormatinya, distribusi normal disebut juga distribusi gauss. Suatu variabel acak kontinyu *x* dikatakan berdistribusi normal dengan rata-rata μ dari variansi σ^2 apabila variabel ini mempunyai fungsi kebolehjadian sebagai berikut:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{5}$$

dalam hal ini : *x* = nilai ukur, μ = nilai rata-rata populasi, dan σ = simpangan baku. Distribusi ini mempunyai maksimum pada nilai $x=\mu$. Kebolehjadian untuk mendapatkan nilai *x* antara dua batas x_1 dan x_2 diberikan oleh persamaan:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx \tag{6}$$

Contoh Soal 2.2.

Bahan bakar aluminum untuk reaktor air ringan dilingkupi oleh tabung logam dengan nilai rata-rata diameter luar *d* sama dengan 20 mm. Diasumsikan bahwa *d* berdistribusi normal disekitar nilai rata-rata dengan simpangan baku σ = 0,5 mm. Untuk alasan keselamatan, tidak boleh digunakan tabung dengan *d*>21,5 mm atau *d*<18,5 mm. Jika diproduksi 10.000 tabung, berapa banyak dari tabung-tabung diperkirakan terbuang karena tidak memenuhi alasan keamanan seperti diberikan?

Jawaban:

Kebolehjadian bahwa diameter tabung akan lebih kecil dari 18,5 atau lebih besar dari 21,5 adalah:

$$P(x<18{,}5) + P(x>21{,}5) = \int_{-\infty}^{18{,}5} \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x-20)^2}{2(0{,}5)^2} \right)$$

$$+ \int_{21{,}5}^{\infty} \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x-20)^2}{2(0{,}5)^2} \right)$$

Di dalam pernyataan distribusi normal baku dan juga karena kedua integral sama, maka didapatkan:

$$P(x < 18{,}5) + P(x > 21{,}5) = 2\left[1 - \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz\right]$$

dalam hal ini:

$$z = \frac{x - 20}{0{,}5}$$

Dari tabel integral diperoleh nilai integral berikut:

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 0{,}99865$$

sehingga diperoleh:

$$P(x < 18{,}5) + P(x > 21{,}5) = 0{,}0027$$

Dengan demikian, taksiran bahwa dibawah kondisi pabrikasi seperti contoh ini, sebanyak 27 tabung dari 10.000 harus dibuang.

<u>Distribusi Poisson</u>

Distribusi ini dapat diturunkan dari distribusi Binomial untuk n besar dan nilai μ=*np* konsatan. Persamaan untuk distribusi Poisson ditunjukkan pada persamaan (7).

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \tag{7}$$

Dalam hal ini, $n \to \infty$ dan $p \to 0$, μ = nilai rata-rata (*np*), dan x = banyaknya sukses (nilai ukur). Nilai variansi dari distribusi Poisson adalah sebagai berikut:

$$\sigma^2 = \mu \tag{8}$$

Dalam praktek, distribusi Poisson sering timbul dalam perhitungan dari peristiwa-peristiwa yang jarang terjadi, yaitu banyaknya terjadinya suatu peristiwa dalam kebolehjadian *p* yang kecil dalam n percobaan bebas.

Contoh Soal 2.3.

Sebuah detektor radiasi digunakan untuk mencacah partikel yang dipancarkan oleh sumber radioisotop. Jika diketahui bahwa laju cacah rata-rata adalah 20 cacah/menit, berapakah kebolehjadian bahwa pada pencacahan berikutnya akan diperoleh 18 cacah/menit?

Jawaban:
Kebolehjadian peluruhan atom radioaktif mengikuti distribusi Poisson. Sehingga, dengan menggunakan persamaan (2.8) diperoleh:

$$P(18) = \frac{20^{18}}{18!} e^{-20} = 0{,}0844 \approx 8\%$$

Ini berarti bahwa jika dilakukan 10.000 pengukuran, 844 darinya ditaksir memberikan hasil 18 cacah/menit.

Nilai Rata-rata dan Ralat Berbobot

Misalkan kita mempunyai n buah nilai ukur (x_i; i=1,2, ...n) yang berasal dari distribusi-distribusi induk Gaussian dengan rata-rata μ sama dan simpanga baku σ_i, maka kebolehjadian mendapatkan nilia ukur x_i adalah:

$$P(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_i}\right)^2} \tag{1}$$

Oleh karena nilai μ tidak diketahui, maka nilai rata-rata populasi induk didekati oleh nilai rata-rata eksperimental μ'. Kebolehjadian medapatkan nilai x_i adalah:

$$P(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right)^2} \tag{2}$$

Kebolehjadian untuk mendapatkan semua n buah pengukuran adalah

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i) \tag{3}$$

$$P(x) = \left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right)^2} \tag{4}$$

Nilai rata-rata dari suatu pengukuran adalah nilai yang mempunyai kebolehjadian terbesar. Pada fungsi distribusi Gaussian, kebolehjadi terbesar terjadi jika faktor dalam eksponensial minimum, yang secara matematis dipenuhi apabilai:

$$\frac{d}{d\bar{x}}\left(-\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right)^2\right) = 0 \qquad 5)$$

$$\sum_i\left(\frac{x_i-\mu'}{\sigma_i}\right) = 0 \qquad 6)$$

$$\sum_i\left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right) - \sum_i\left(\frac{\mu'}{\sigma_i}\right) = 0 \qquad 7)$$

Akhirnya diperoleh persamaan untuk nilai rata-rata berbobot sebagai berikut:

$$\mu' = \frac{\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i{}^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i{}^2}} \qquad (8)$$

Ketidakpastiannya dihitung melalui persamaan perambatan ralat, yaitu:

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \sum \left[\sigma_i^2 \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} \right)^2 \right]$$

(9)

Dengan mensubstitusikan persamaan (10) di bawah ini:

$$\frac{\partial \mu'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \qquad (10)$$

ke persmaan (9) maka diperoleh perumusan untuk nilai ralat sebagai berikut (yang hasil akhirnya ditunjukkan pada persamaan (13):

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \sum \sigma_i^2 \frac{\left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2} = \sum \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2} \qquad (11)$$

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \frac{1}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad (12)$$

$$\sigma_{\mu'}{}^2 = \frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \qquad (13)$$